UNIT-3

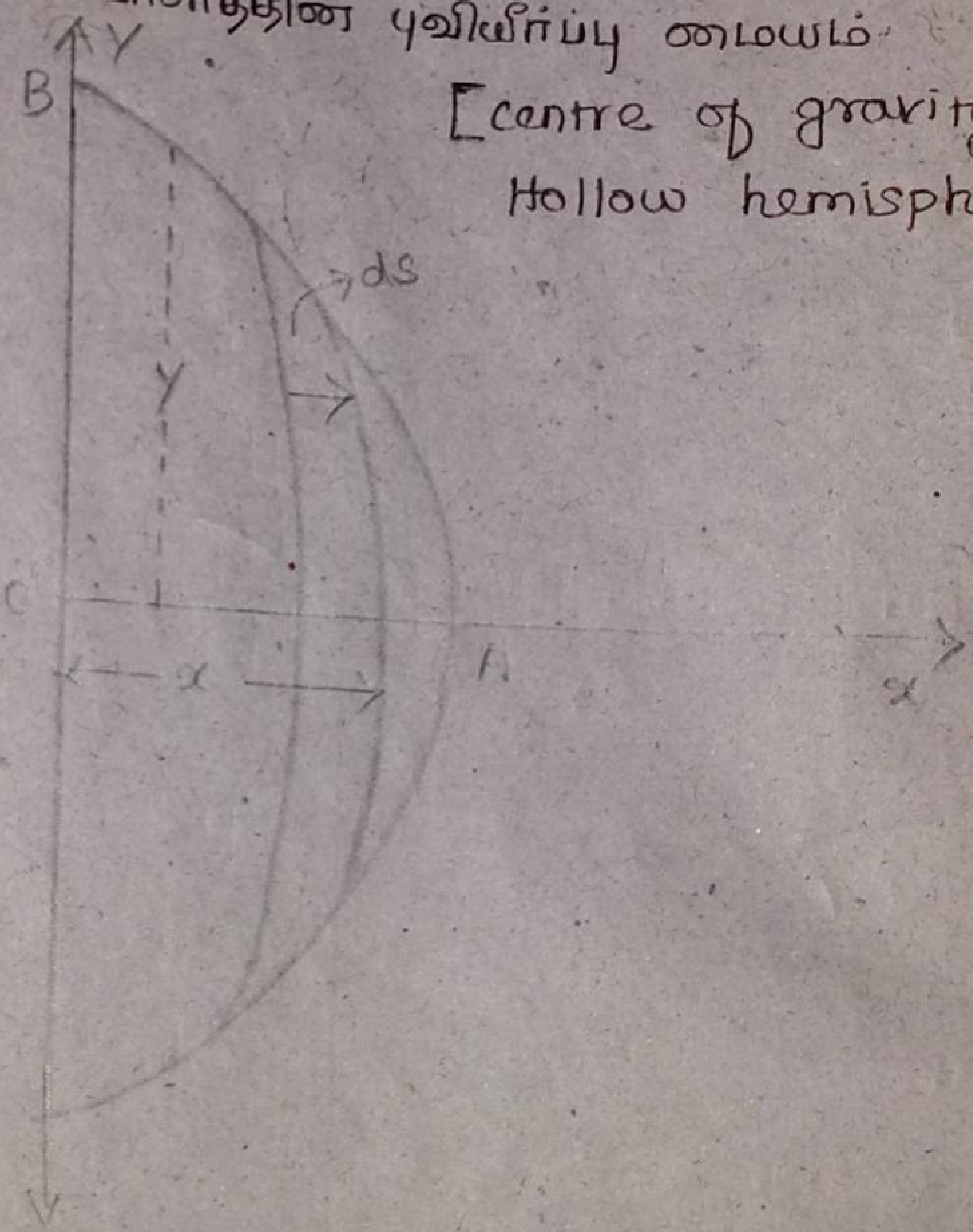
MECHANICS

1) புவியீர்ப்பு மையம்: [centre of gravity]

பொருளின் நிலை எதுவாயினும் பொருளின் எடை எந்தப் புள்ளி வழியாகச் செயல்படுகிறதோ, அப்புள்ளி புவியீர்ப்பு மையம் என வரையறுக்கப்படுகிறது

2) உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்

[Centre of gravity of a Hollow hemisphere]



ஆரம் a - கொண்ட வட்டத்தின் கால்வட்ட வில் AB எனக் கொள்வோம். இதன் மையம் O-ஐ ஆயமாகக் கொள்வோம்.

OA, OB ஆகியவற்றை அச்சாகக் கொள்ளும்போது வளைகோடு AB-க்கான சமன்பாடு

$$x^2+y^2=a^2 \longrightarrow (1)$$ ஆகும்.

OA - அச்சை மைய அச்சாகக் கொண்டு வில் AB-ஐ சுழற்றும்போது, அரைக்கோளத்தின் பரப்பு கிடைக்கிறது. சமச்சீரான தன்மை காரணமாக, இதன் புவியீர்ப்பு மையம் OA-ல் அமையும். எனவே,

$$\bar{y} = 0$$

O - விலிருந்து x - தொலைவில் அமைந்துள்ள நடுமன் ds-ம் ஆரம் y-ம் கொண்ட வளையப் பகுதியைக் கருதுவோம்.

கணக்கில் கொண்ட வளையப் பகுதியின் புறப் பரப்பளவு $= 2\pi y \cdot ds$

ஓரலகுப் பரப்பின் நிறை ρ எனில் வளையப் பகுதியின் நிறை $= 2\pi \rho\, ds$.

இந்த நிறையானது வட்ட வளைய வடிவில் உள்ளது. எனவே இதன் புவியீர்ப்பு மையம், இதன் மையம் $[x, 0]$ -ல் அமையும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^{a} 2\pi \rho\, ds \cdot x}{\sum_{x=0}^{a} 2\pi \rho \cdot ds} \longrightarrow (2)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a yx \cdot ds}{\int_0^a y\, ds} \longrightarrow (3)$$

ஆனால் $x^2+y^2=a^2$.

$$\therefore 2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}$$

$$\therefore dy/dx=-x/y$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+(dy/dx)^2$$

$$=1+x^2/y^2$$

$$=\frac{x^2+y^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\frac{a^2}{y^2}\quad[\because x^2+y^2=a^2]$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{a}{y}$$

$$ds=\frac{a}{y}\cdot dx \longrightarrow (4)$$

சமன்பாடு 4-ஐ 3-ல் பதிலீடு செய்ய,

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a xy\,\frac{a}{y}\cdot dx}{\int_0^a y\cdot a/y\,dx}$$

$$=\int_0^a\frac{a\,x\,dx}{a\,dx}$$

$$= \frac{a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a}{[ax]_0^a}$$

$$= \frac{a\left[\frac{a^2}{2} - 0\right]}{[ax]_0^a}$$

$$= \frac{a\left[a^2/_2 - 0\right]}{[a[a] - 0]}$$

$$= \frac{a^3/2}{a^2}$$

$$= \frac{a^3}{2} \times 1/_{a^2} = a/_2$$

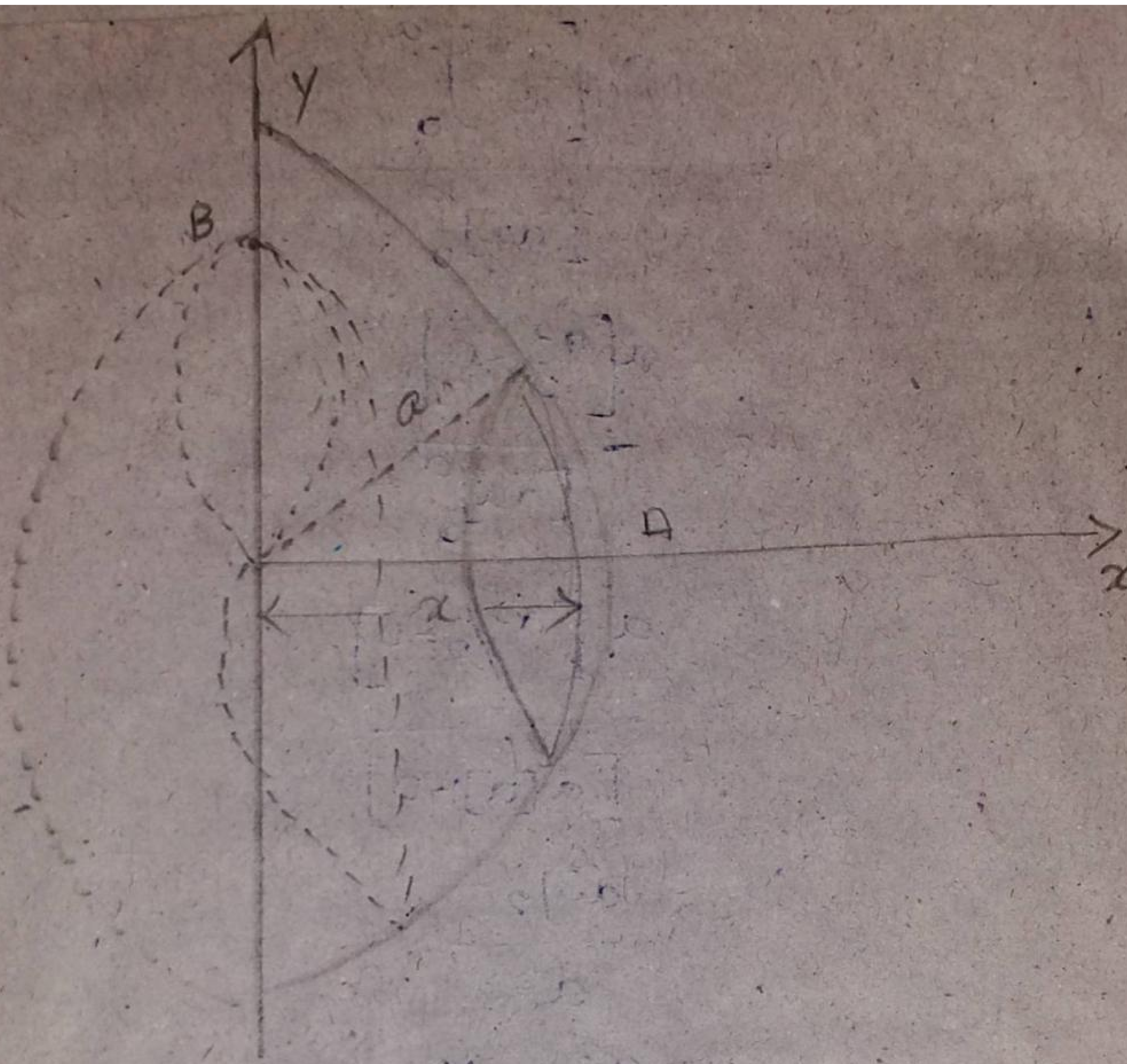
$$\therefore \bar{x} = a/_2.$$

ஆகவே, உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது அதன் அச்சின் மையத்திலிருந்து $a/_2$ தொலைவில் அமையும்.

3) திடப்பொருள் அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்

[centre of gravity of a solid hemisphere]

ஆரம் a கொண்ட வட்டத்தின் கால் வட்டவில் AB எனக் கொள்வோம். O-ஐ ஆயமாகவும், OA, OB ஆகியவற்றை அச்சாகவும் கொண்டால் AB என்ற வளைகோட்டிற்கான சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2 \longrightarrow (1)$



AOB என்ற பரப்பினை OA என்ற அச்சை மையமாகக் கொண்டு சுற்றப்படும்போது, அரைக்கோளத்தின் பருமன் தோன்றுகிறது. சமச்சீர் தன்மை காரணமாக இதன் புவியீர்ப்பு மையம் OA-ல் அமையும். ஆகவே, $\bar{y}=0$

O-விலிருந்து x தொலைவில் தடிமன் dx கொண்ட வட்டப் பகுதியைக் கருதுவோம். இதன் ஆரம் y எனக் கொள்வோம்.

∴ கணக்கில் கொண்ட வட்டப்பகுதியின் பருமன் $= \pi y^2 dx \longrightarrow (2)$

ஓரலகு பருமனின் நிறை ρ எனக் கொண்டால்
வட்டத்தகட்டுப் பகுதியின் நிறை $= \pi y^2 dx \cdot \rho \longrightarrow (3)$

$\pi y^2 \rho dx$ நிறை கொண்ட வட்டத் தகட்டின்
புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையம் $(x, 0)$-ல் அமையும்

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^{a} \pi y^2 \rho . dx \cdot x}{\sum_{x=0}^{a} \pi y^2 \rho dx} =$$

$$= \int_0^a \frac{y^2 x dx}{y^2 dx} \longrightarrow (4)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a (a^2 - x^2) x dx}{\int_0^a (a^2 - x^2) dx}$$

ஆனால் $y^2 = (a^2 - x^2)$ $\qquad \int_0^a \frac{(a^2 - x^2) x dx}{(a^2 - x^2) dx}$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a (a^2 x - x^3) dx}{\int_0^a (a^2 - x^2) dx}$$

$$= \frac{\left[a^2 \, x^2/2 - x^4/4\right]_0^a}{\left[a^2 x - x^3/3\right]_0^a}$$

$$= \frac{a^2 (a/2)^2 - (a/4)^4}{a^2 (a) - (a^3)/3} = \frac{\left[\frac{1}{2} a^2 x^2 - 1/4\, x^4\right]_0^a}{\left[a^2 x - 1/x\, x^3\right]_0^a}$$

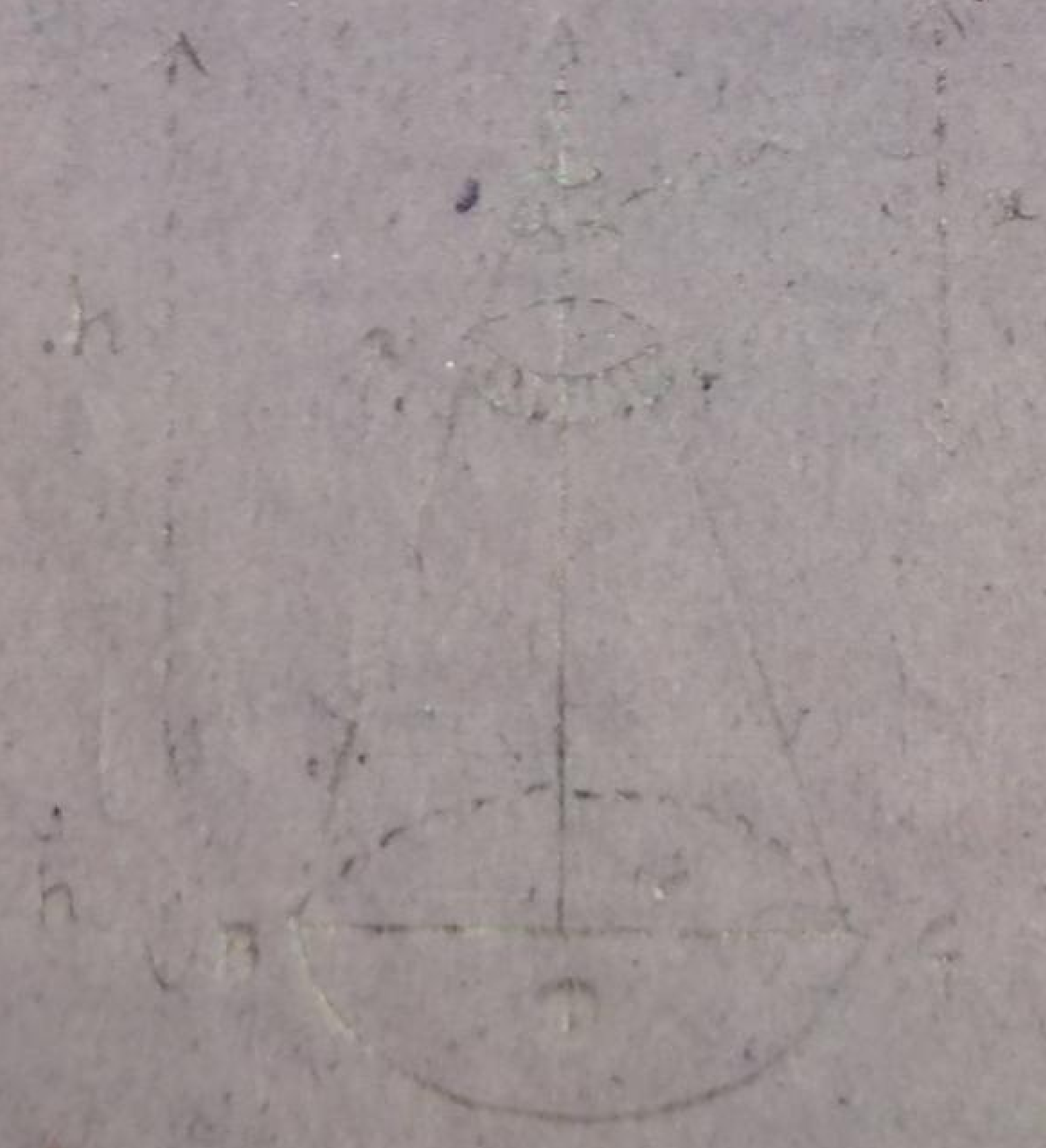
$$= \frac{\frac{1}{2} a^4 - 1/4\, a^4}{\left[a^3 - 1/a\, a^3\right]}$$

$$= \frac{1/4\, a^4}{2/3\, a^3}$$

$$\therefore \bar{x} = 3/8\, a \longrightarrow (5)$$

எனவே, ஆரம் a கொண்ட அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது, அதன் அச்சின் மையத்திலி-ருந்து $3/8\,a$ தொலைவில் அமையும்.

4) திடப்பொருள் நேர்கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம்.



பட்டக் கூம்பின் அடிப் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை மிக அதிகமாக்க இது ஒரு ஒழுங்கான கூம்பாகிறது. கூம்பின் உயரம் h எனக் கொண்டால் இதன் புவியீர்ப்பு மையம், உச்சியிலிருந்து $3/4\, h$ ஆழத்தில் அமையும்.

இதில், $ABC \rightarrow$ கெட்டியான கூம்பின் குறுக்கு வெட்டுப்பகுதி

$h \rightarrow$ கூம்பின் உயரம்

$r \rightarrow$ ஆரம்

$D \rightarrow$ அடிப்பகுதியின் மையம்

$AD = h$ கூம்பின் குத்துயரம்

$B'C' \rightarrow$ உச்சியிலிருந்து x தொலைவில் தடிமன் dx கொண்ட தகடு [இது கூம்பின் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகும்].

$2\alpha \rightarrow$ கூம்பின் உச்சிக்கோணம்.

$y \rightarrow$ கணக்கில் எடுத்துக்கொண்ட தகட்டின் ஆரம்

எனவே, $y = x \tan\alpha \rightarrow (1)$

$\therefore$ தகட்டின் பருமன்,

$=$ பரப்பளவு $\times$ தடிமன்

$= \pi y^2 dx$

$= \pi x^2 \tan^2\alpha \cdot dx \longrightarrow (2)$

ஓரலகு பருமனின் நிறை ρ எனக் கொண்டால் கணக்கில் கொண்ட தகட்டின் நிறை

$= \pi x^2 \tan^2\alpha\, dx \cdot \rho \longrightarrow (3)$

A-ஐப் பற்றிய தகட்டின் திருப்புத்திறன்,

$= \pi x^2 \rho \tan^2\alpha\, dx \cdot x \longrightarrow (4)$

இதே போன்று கூம்பினைப் பல தகடுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு தகடுகளின் திருப்புத்திறன் கணக்கிடலாம். கூம்பினுள்ள எல்லாத் தகடுகளின் A-ஐப் பற்றிய திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \int_0^h \pi \rho \tan^2\alpha \cdot x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \pi \rho \tan^2\alpha \cdot h^4 \longrightarrow (5)$$

கூம்பின் பருமன் $\Big\} = \int_0^h \pi \tan^2\alpha \cdot x^2 \cdot dx$

$$= \frac{1}{3} \pi \tan^2\alpha \cdot h^3 \longrightarrow (6)$$

கூம்பின் நிறை $= \frac{1}{3} \pi \tan^2\alpha \, h^3 \rho \longrightarrow (7)$

கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து $\bar{x}$ தொலைவில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். கூம்பின் மொத்த எடையின் திருப்புத்திறன்,

$$= \frac{1}{3} \pi \rho \tan^2\alpha \, h^3 \cdot \bar{x} \longrightarrow (8)$$

$$\therefore \frac{1}{3} \pi \rho \tan^2\alpha \, h^3 \bar{x} = \frac{1}{4} \pi \rho \tan^2\alpha \, h^4$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3}{4} h$$

எனவே, கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் AD என்ற கோட்டை 3:4 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் G என்ற புள்ளியில் அமையும்.

மிதத்தல் Floatation

திரவத்தில் மிதக்கும் பொருள் ஒன்றைக் கருதுவோம். இது சமநிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். மிதக்கும் பொருளின் மீது இரு செங்குத்து விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை,

(i) பொருளினுடைய எடையானது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செயற்படுகிறது.

(ii) பொருளின் மீது தொகுபயன் செங்குத்து அழுக்கம் செயற்படுகிறது. இது மிதக்கும் பொருளால் இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாகவும், மிதவைத் திறமையம் வழியாகவும் செயற்படுகிறது. அதாவது இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செயற்படுகிறது.

மிதக்கும் பொருள் சமநிலையில் அமைவதற்கு இவ்விரு விசைகளும் சமமாகவும் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் எதிர் திசையிலும் செயற்பட வேண்டும்.

ஆகவே மிதத்தல் விதியை கீழ்கண்டவாறு கூறலாம்.

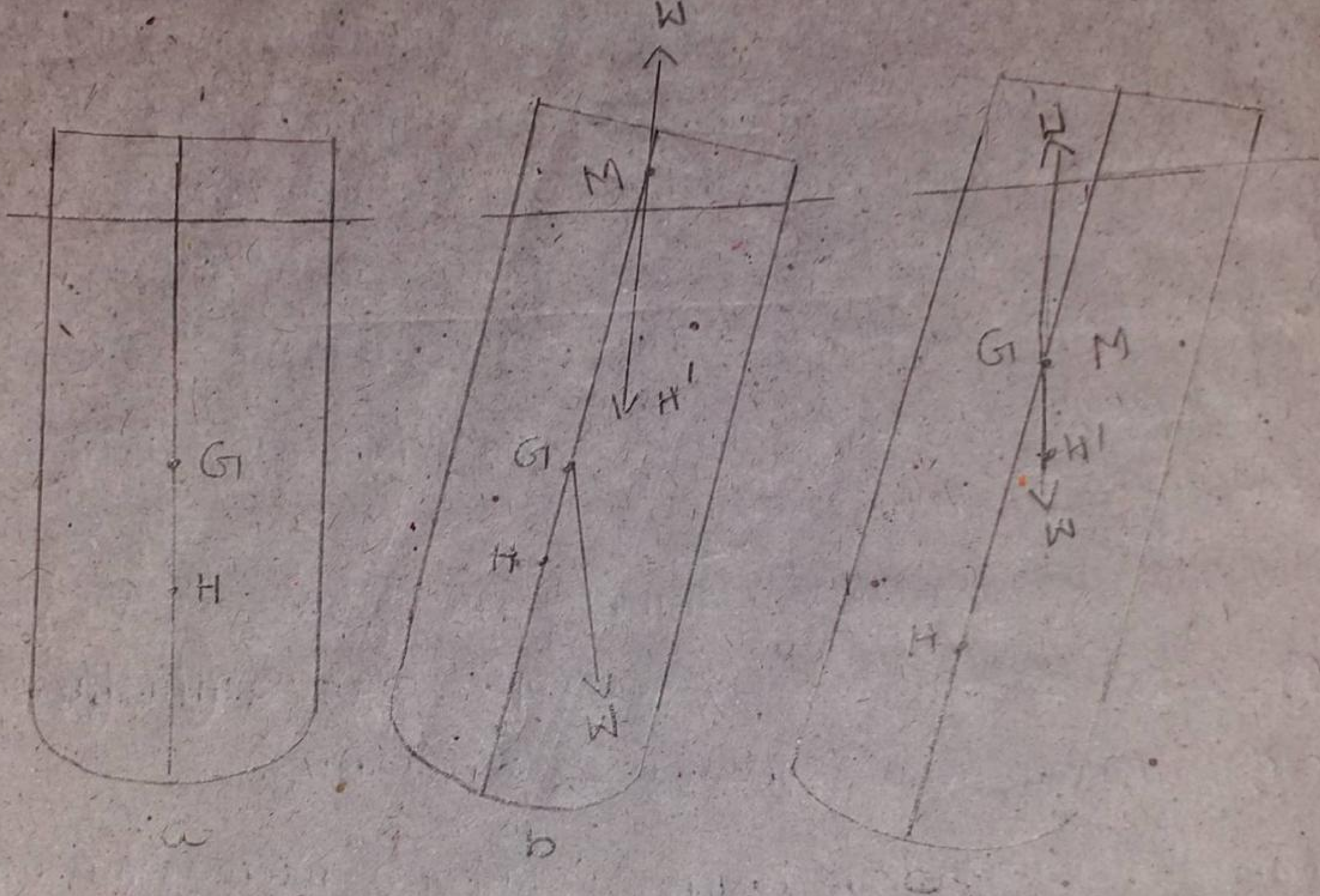
ஒரு பொருள் ஓர் திரவத்தில் மிதக்கும்போது இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த திரவத்தின் எடையானது பொருளின் எடைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

மிதக்கும் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமும், இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் செயற்பட வேண்டும்.

மிதக்கும் பொருளின் நிலைத்தன்மை

[Stability of Floating bodies]

ஓர் பொருளானது ஓர் திரவத்தில் மிதக்கும்போது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G-ம் மிதவைத் திறமையம் H-ம் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் அமைய வேண்டும்.



மிதக்கின்ற பொருள் ஒன்றை சிறிது சுழற்றுவதாகக் கொள்வோம். எனவே கோடு HG செங்கோட்டிற்குச் சாய்வாக அமையும். புதிய நிலையில் உள்ள திரவத்தின் அழுக்கமானது பொருளை மீண்டும் சமநிலையாக்கும் [Stable]. இவ்வாறின்றி புதிய நிலையிலுள்ள திரவத்தின் அழுக்கமானது, மேலும் அதிகமாக சுழற்றினால் இச்சமநிலை நிலையற்றதாக (unstable) இருக்கும்.

படம் [a] பொருள் சுழற்றப்படாத ஆரம்ப நிலையைக் காட்டுகிறது. படம் [b]ம் [c]-ம் சுழற்றப்பட்ட நிலையைக் காட்டுகிறது. இங்கு H' என்பது மிதவைத் திற மையத்தின் புதிய நிலையாகும். H'M என்ற செங்குத்துக் கோடானது HG எனும் கோட்டை M-ல் சந்திக்கிறது.

படம் [b]-ல் M என்ற புள்ளியானது G-க்கு மேலே அமைந்துள்ளது. இப்போது விசையானது பொருள் சுழலுகின்ற திசைக்கு எதிராக செயற்படுகிறது. எனவே பொருளானது தனது பழைய நிலைக்குத் திரும்பும். இவ்வகையான சமநிலை நிலையானதாகும்.

படம் [c]-ல் M என்ற புள்ளியானது G-க்கு கீழே அமைந்துள்ளது. எனவே செயற்படும் விசையானது பொருளை மேலும் சுழற்றுகிறது. எனவே பொருளானது தன் பழைய நிலையை அடைய முடியாது. இவ்வகையான சமநிலையை நிலையற்ற சமநிலை என்பர்.

ஆகவே, ஒரு பொருளின் சமநிலையான நிலைத் தன்மையானது G-யை நோக்க M- அமைந்திருக்கும் புள்ளியைச் சார்ந்துள்ளது. இதனை மிதவைக் காப்பு மையம் [Meta centre] என்பர்

மிதவைக் காப்பு மையம் [Meta centre]

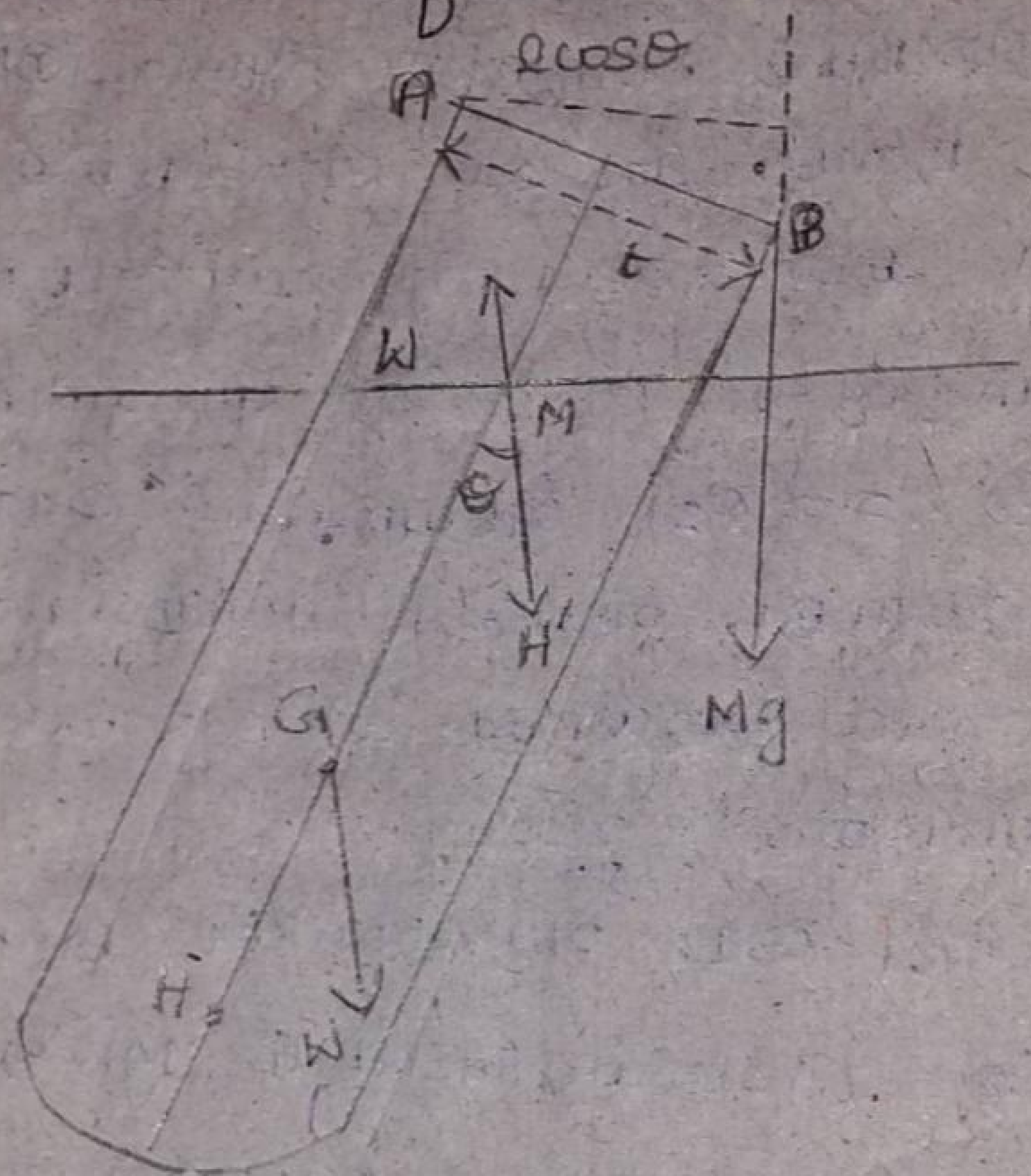
இடம் பெயர்ந்த திரவத்தின் புதிய மிதவைத் திற மையம் வழியாகச் செல்லக்கூடிய செங்குத்துக் கோடு, பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம், பழைய மிதவைத் திற மையம் ஆகியவற்றின் வழியாகச் செல்லக்கூடிய கோட்டில் வெட்டும் புள்ளியை மிதவைக் காப்பு மையம் என்பர்.

மிதவைக் காப்புயரம் [Metacentric height]

மிதவைக் காப்பு மையம், பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் மிதவைக் காப்புயரம் என்பர்.

கப்பலின் மிதவைக் காப்புயரம் காணல்

[Determination of meta centric height of a ship]



கப்பலின் எடை W இடப்பெயர்ச்சி முறையில் கண்டுகொள்ள வேண்டும். கப்பல் தளத்தின் முனைகள் A, B களில் இரு படகுகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. படகுகளில் நிரப்பப்படும் நீரின் எடையை பருமனிலிருந்து கணக்கிடலாம். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் l எனக் கொள்வோம். A, B-ல் உள்ள படகுகளில் அடுத்தடுத்து நீர் நிரப்புவது mg என்ற எடையை A-யிலிருந்து B-க்கு நகர்த்துவதற்கு இணையாகும். A-ல் உள்ள அதே நிறை கொண்ட நீர் கொண்டு B-ல் நிரப்பும்போது கப்பலானது ஓர் சிறிய கோணம்

θ சுழலுவதாகக் கொள்வோம். கப்பலின் தொங்க விடப்பட்டுள்ள தூக்கு நூற்குண்டு [plumb line] கொண்டு கோணத்தை அளவிடலாம்.

கப்பலானது சிறிது சாய்ந்திருப்பதால் மிதவைத் திற மையம் சிறிது மாறுகிறது. H, H' என்பவை முறையே பழைய, புதிய மிதவைத் திற மையங்கள் எனவும், G கப்பலின் புவியீர்ப்பு மையம் எனவும், M மிதவைக் காப்பு மையம் எனவும், GM மிதவைக் காப்புயரம் எனவும், கொள்வோம். படகு அடுத்தடுத்து நீர் கொண்டு நிரப்பப்படும்போது விலக்கு இரட்டை [Deflecting couple]

$$= mgl\cos\theta \longrightarrow (1)$$

G என்ற புள்ளியில் செயற்படும் கப்பலின் எடை H-ல் செயல்படும் மிதவைத் திற விசை ஆகியவற்றின் மீட்சி இரட்டை

$$= W \cdot GM \cdot \sin\theta \longrightarrow (2)$$

$$\therefore W \cdot GM \cdot \sin\theta = mgl\cos\theta \longrightarrow (3)$$

$$\therefore GM = \frac{mgl}{W \cdot \tan\theta} \longrightarrow (4)$$

θ-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாதலால்,

$$\tan\theta = \theta$$

$$\therefore GM = \frac{mgl}{W\theta} \longrightarrow (5)$$

சமன்பாடு (5)-னைப் பயன்படுத்தி கப்பலின் மிதவைக் காப்புயரம் கணக்கிடலாம்.